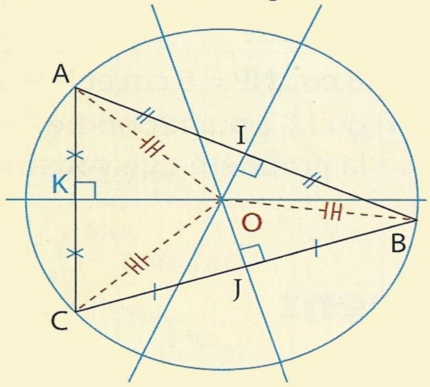
Rappels : les triangles

Droites remarquables dans un triangle

Médiatrices des côtés

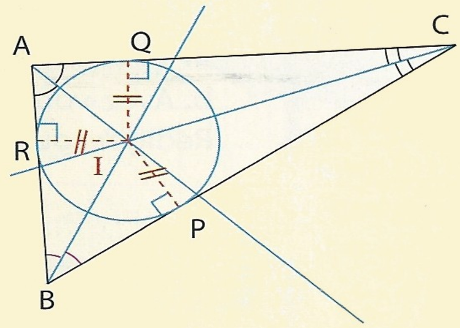
Concourantes en un point : le centre du **cercle circonscrit** au triangle.



$OA = OB = OC$

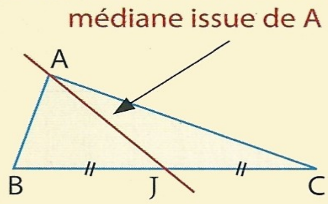
Bissectrices des angles

Concourantes en un point : le centre du **cercle inscrit** au triangle.



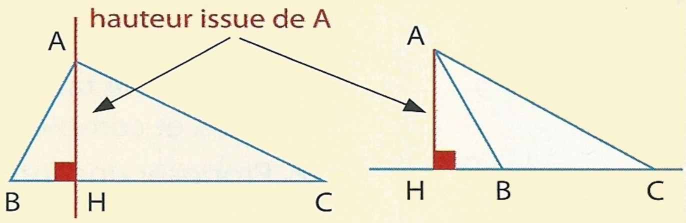
$IP = IQ = IR$

Médiane issue d'un sommet



$\text{aire}(AJB) = \text{aire}(AJC) = \frac{1}{2}\text{aire}(ABC)$

Hauteur issue d'un sommet



$\text{aire}(ABC) = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{BC \times AH}{2}$

Remarque : il existe aussi des propriétés de concours pour les médianes et hauteurs (voir TP 2 page 260, exercice 118 page 339).

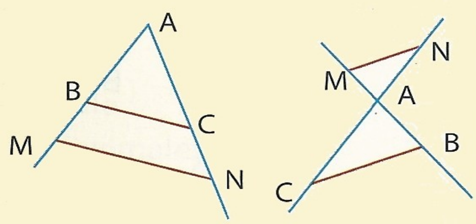
Proportionnalité dans le triangle. Théorème de Thalès

Soit un triangle ABC. M un point de (AB) et N un point de (AC) distincts de A.

- Si (BC) et (MN) sont parallèles, alors AMN et ABC ont leurs côtés proportionnels :

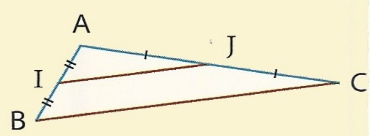
$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

- Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ et si les points A, B, M et les points A, C, N sont dans le même ordre, alors (BC) et (MN) sont parallèles.



Cas particulier avec des milieux

- Dans un triangle ABC, si I et J sont les milieux de $[AB]$ et $[AC]$, alors $(IJ) // (BC)$ et $IJ = \frac{1}{2}BC$.
- Dans un triangle ABC, si I est le milieu de $[AB]$, alors la parallèle à (BC) passant par I coupe $[BC]$ en son milieu.

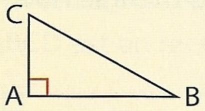


Triangle rectangle

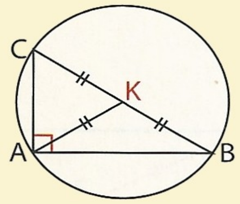
Définition : Un triangle rectangle est un triangle qui a un angle droit.

Propriétés d'un triangle rectangle

Si ABC est rectangle en **A** **alors**



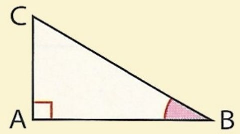
- **Théorème de Pythagore** : $BC^2 = AB^2 + AC^2$
- Le centre du cercle circonscrit au triangle ABC est le milieu de $[BC]$



- $\cos \widehat{B} = \dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \dfrac{AB}{BC}$

$\sin \widehat{B} = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \dfrac{AC}{BC}$

$\tan \widehat{B} = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \dfrac{AC}{AB}$



Comment démontrer qu'un triangle est rectangle ?

- Si (AB) et (AC) sont perpendiculaires, alors ABC est rectangle en A. [DÉFINITION]
- **Réciproque du théorème de Pythagore :**
  Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$ alors ABC est rectangle en A [PROPRIÉTÉ]
- Si ABC est inscrit dans le cercle de diamètre $[BC]$ alors ABC est rectangle en A [PROPRIÉTÉ]

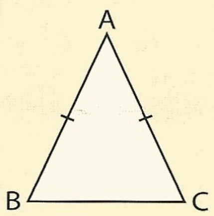
Le théorème de Pythagore : « Si ABC est rectangle en A alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$ »
et sa réciproque : « Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$ alors ABC est rectangle en A »
sont tous les deux vrais. On peut les énoncer une seule phrase grâce à une équivalence :
« ABC est rectangle en A » **si et seulement si** « $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ».

Triangle isocèle

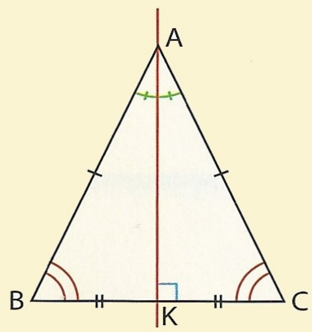
Définition : Un triangle isocèle est un triangle qui a deux côtés de la même longueur.

Propriétés d'un triangle isocèle

Si ABC est isocèle en A **alors**



La médiane issue de A est aussi :
– médiatrice de $[BC]$,
– hauteur issue de A,
– bissectrice de $\widehat{A}$.
Cette droite est un axe de symétrie du triangle donc $\widehat{B} = \widehat{C}$.



Comment démontrer qu'un triangle est isocèle ?

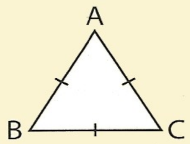
- Si $AB = AC$ alors le triangle ABC est isocèle en A. [DÉFINITION]
- Si $\widehat{B} = \widehat{C}$ alors le triangle ABC est isocèle en A. [PROPRIÉTÉ]
- Si deux des droites remarquables du triangle ABC sont confondues, alors ABC est isocèle. [PROPRIÉTÉ]

Triangle équilatéral

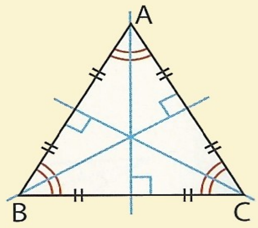
Définition : Un triangle équilatéral est un triangle qui a ses trois côtés de la même longueur.

Propriétés d'un triangle équilatéral

Si ABC est équilatéral **alors**



- Les médianes sont aussi hauteurs, médiatrices, bissectrices des angles et axes de symétrie du triangle ABC.
- $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60°$.



Comment démontrer qu'un triangle est équilatéral ?

- Si $AB = AC = BC$ alors ABC est équilatéral. [DÉFINITION]
- Si un triangle a ses trois angles égaux, alors il est équilatéral. [PROPRIÉTÉ]
- Si un triangle est isocèle et possède un angle de 60°, alors il est équilatéral. [PROPRIÉTÉ]

Rappels : le cercle

Définition : Le cercle de centre O et de rayon r $(r > 0)$ est l'ensemble des points M du plan tels que $OM = r$.

Comment démontrer qu'un point appartient à un cercle ?

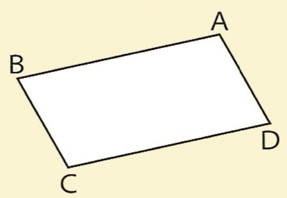
- Si $OM = r$ alors M appartient au cercle de centre O et de rayon r. [DÉFINITION]
- Si AMB est rectangle en M, alors M appartient au cercle de diamètre $[AB]$. [PROPRIÉTÉ]

Rappels : le parallélogramme

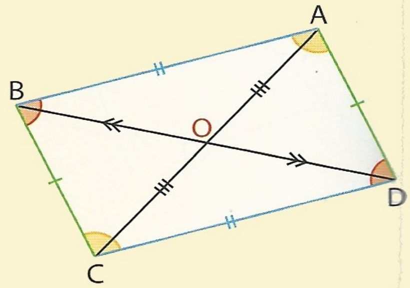
Définition : Un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés sont parallèles deux à deux.

Propriétés du parallélogramme

Si ABCD est un parallélogramme **alors**



- Les diagonales ont le même milieu.
Ce milieu est le centre de symétrie du parallélogramme.
- Par suite, ABCD a ses côtés opposés de la même longueur et ses angles opposés égaux.



Comment démontrer que ABCD est un parallélogramme ?

- Si $(AB) // (CD)$ et $(AD) // (BC)$ alors ABCD est un parallélogramme. [DÉFINITION]
- Si les diagonales du quadrilatère ABCD ont même milieu, alors ABCD est un parallélogramme. [PROPRIÉTÉ]
- Si ABCD est un quadrilatère **non croisé** qui a deux côtés parallèles et de la même longueur, alors ABCD est un parallélogramme. [PROPRIÉTÉ]

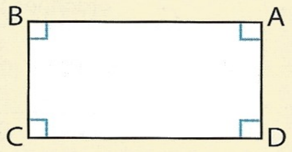
Rappels : rectangle, losange, carré

Rectangle

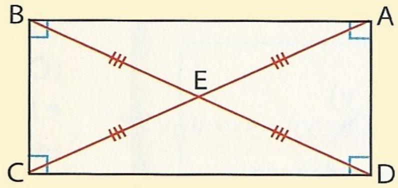
Définition : Un rectangle est un quadrilatère qui a quatre angles droits.

Propriétés du rectangle

Si ABCD est un rectangle **alors**



- ABCD est un parallélogramme (donc il en a toutes les propriétés).
- Ses diagonales ont la même longueur.



Comment montrer que ABCD est un rectangle ?

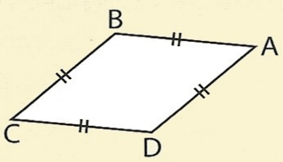
- Si ABCD a quatre angles droits, alors ABCD est un rectangle [DÉFINITION]
- Si ABCD est un parallélogramme qui a un angle droit, alors ABCD est un rectangle. [PROPRIÉTÉ]
- Si ABCD est un parallélogramme qui a ses diagonales de la même longueur, alors ABCD est un rectangle. [PROPRIÉTÉ]

Losange

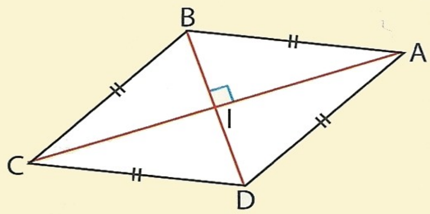
Définition : Un losange est un quadrilatère qui a ses côtés de la même longueur.

Propriétés du losange

Si ABCD est un losange **alors**



- ABCD est un parallélogramme (donc il en a toutes les propriétés).
- Ses diagonales sont perpendiculaires.



Comment démontrer que ABCD est un losange ?

- Si ABCD a ses côtés de même longueur, alors ABCD est un losange. [DÉFINITION]
- Si ABCD est un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs de la même longueur, alors ABCD est un losange. [PROPRIÉTÉ]
- Si ABCD est un parallélogramme qui a ses diagonales perpendiculaires, alors ABCD est un losange. [PROPRIÉTÉ]

Carré

Définition : Un carré est un quadrilatère qui a ses côtés de la même longueur et quatre angles droits.
Remarque : un carré est à la fois un losange et un rectangle.

Propriétés du carré :

Un carré a toutes les propriétés du rectangle et du losange.

Comment démontrer que ABCD est un carré ?

On démontre que ABCD est à la fois un rectangle et un losange.